3- R علاقة

$aRb \wedge bRa \Rightarrow \exists t_1, t_2 \in \mathbb{N}^* : b = a^{t_1} \; ; \; a = b^{t_2}$

$\Rightarrow a = a^{t_1 t_2} \Rightarrow t_1 t_2 = 1$

$\boxed{a = b}$ أي $\boxed{t_1 = t_2 = 1}$

إذن R علاقة ترتيب جزئي لأن

$5 R 2$ و $2 R 5$ يجعلها أنها ليست علاقة ترتيب

المحاضرة السابعة

قوانين التشكيل

تعريف:

ليكن A مجموعة ما نقول عن $*$ أنه قانون تشكيل داخلي على A إذا تحقق

$$u, v \in A \iff u * v \in A$$

تعريف

ليكن A مجموعة ما وليكن F حقل ما عندها نقول عن $(.)$ أنه قانون تشكيل خارجي مجموعة مؤثرات F إذا تحقق:

$$\lambda \in F \; , \; v \in A \Rightarrow \lambda . v \in A$$

Farah Notebooks

أمثلة

① $A = \mathbb{Z}$ ولنعرف $*$ بالشكل

$x * y = x + y - 5$ فيما $x, y \in \mathbb{Z}$

إن $*$ قانون تشكيل داخلي على المجموعة $\mathbb{Z}$

② $A = \mathbb{Z}^*$ ولنعرف $*$ بالشكل:

$$\forall x, y \in \mathbb{Z} : \; x * y = \frac{x \cdot y}{x \cdot y}$$

إن $*$ ليس قانون تشكيل داخلي على $\mathbb{Z}$

③ $A = M_{n \times n}(\mathbb{R})$ أي مجموعة المصفوفات في A تشكل قانون تشكيل داخلي على A

★ خصائص قوانين التشكيل الداخلي:

لتكن A مجموعة غير خالية ولتكن $*$ قانون تشكيل داخلي على A

نرمز بـ $(A, *)$ للبنية الجبرية A

عندما نقول عن:

① $*$ تجميعية: إذا

$$(x * y) * z = x * (y * z) = x * y * z$$
$$\forall x, y, z \in A$$

② $*$ تبديلي: إذا

$$\forall x, y \in A \quad x * y = y * x$$

③ نقول عن $e \in A$ أنه عنصر حيادي للبنية $(A, *)$ إذا:

$$\forall x \in A \rightarrow x * e = e * x = x$$

④ إذا وجد $e \in A$ عنصر حيادي، عندها نقول عن x' أنه نظير للعنصر $x \in A$ إذا تحقق:

$$x * x' = x' * x = e \quad ; \quad x' \in A$$

⑤ ليكن $*_1$ و $*_2$ قانوني تشكيل داخلي على A

عندها نقول عن $*_1$ أنه توزيعي على $*_2$ إذا تحقق

$$x *_1 (y *_2 z) = (x *_1 y) *_2 (x *_1 z)$$

مثال ① $A = \mathbb{Q}$ ولتكن $*_1$ و $*_2$ و $*_3$ معرفة بالشكل:

$$x *_1 y = x + y$$
$$x *_2 y = x - y$$
$$x *_3 y = \sqrt{7} \cdot y$$

ادرس خصائص $*_1$ و $*_2$ و $*_3$ (تجميعي، تبديلي، وجود عنصر حيادي، النظير)

الحل: $*_1$: لتكن $x, y, z \in A$ عندها

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$
$$x + y = y + x$$

كذلك $0 \in A$ عنصر حيادي الجمع و $x + (-x) = 0$ مهما يكن $x \in A$ أي مهما كان $x \in A$ فإن $(-x \in A)$

★ إن $*_2$ ليس تجميعي لأن $(1 - 2) - 5 \neq 1 - (2 - 5)$

$\Rightarrow -6 \neq 4$

كذلك $*_2$ ليس تبديلي $1 - 2 \neq 2 - 1$

لا يوجد عنصر حيادي بالنسبة لـ $*_2$ لأن:

$$\left.\begin{matrix} x - e = x \\ e - x = x \end{matrix}\right\} \forall x \in A$$

بالمطابقة $e = 0$ ولا يحقق الثانية.

★ $*_3$: لا يمكن دراسة الخاصة عليها لذا هي ليست قانون تشكيل داخلي.

مثال ② $A = \mathbb{R}$ ولتكن A قانوني تشكيل داخليين $*_1$ و $*_2$ المعرفة بالشكل.

- $x *_1 y = x + y - 5$
- $x *_2 y = \frac{1}{2} x y$

ادرس خصائص $*_1$ و $*_2$.

الحل:

$$(x *_1 y) *_1 z = (x + y - 5) *_1 z$$
$$= x + y - 5 + z - 5$$
$$= x + y + z - 10$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

29

$x *_1 (y *_1 z) = x *_1 (y + z - 5)$

$= x + y + z - 10$

ونه بـ أن $(x *_1 y) *_1 z = x *_1 (y *_1 z)$ أي

$*_1$ تجميعي (يفضل ذلك كلمات كاملة)

$*_1$ تبديلي

$x *_1 y = x + y - 5$

$= y + x - 5$

لأن الجمع تبديلي في R

$= y *_1 x$

إذاً $*_1$ تبديلي.

$*_1$ عيادي ؟ لنبحث عن $e \in A$ وليكن

$\forall x \in A \quad x *_1 e = x$ ونه

$x *_1 e = x$

$x + e - 5 = x \quad \forall x \in A$

بالمطابقة:

$1 = 1$ أثناء x

$e - 5 = 0$ هـ ثابت

إذاً $e = 5 \in R$ وهو العنصر الحيادي.

30

- نظير الـ x بالنسبة لـ $*_1$: نفرض أنه x' يحقق

$x *_1 x' = 5$

$\Rightarrow x + x' - 5 = 5$

$\Rightarrow x' = 10 - x \in R$

② $x *_2 y = \frac{1}{2} xy$

$*_2$ تجميعي لأن:

$(x *_2 y) *_2 z = (\frac{1}{2} xy) *_2 z = \frac{1}{2} (\frac{1}{2} xy) z$

$= \frac{1}{4} xyz$

$x *_2 (y *_2 z) = x * (\frac{1}{2} yz)$

$= \frac{1}{4} xyz$

$(x *_2 y) *_2 z = x *_2 (y *_2 z)$

أي $*_2$ تجميعي

$*_2$ تبديلي لأن:

$x *_2 y = \frac{1}{2} xy$

$= \frac{1}{2} yx$

$= y *_2 x$

31

- هل يوجد e عنصر حيادي بالنسبة لـ $*_2$ بحيث $e \in R$ يحقق:

$x *_2 e = x \quad \forall x \in A$

$\frac{1}{2} xe = x \quad \forall x \in A$

بالمطابقة $\frac{1}{2} e = 1$ أثناء x

$\Rightarrow e = 2 \in R$

ونه $e = 2$ الحيادي إذاً $*_2$ حيادي.

لنوجد $*_2$ نظير $x \in R$ بالنسبة لـ $*_2$

نرمز بـ x' لهذا العنصر المطلوب إذ x' يحقق المعادلة:

$x' *_2 x = 2$

$\frac{1}{2} x' x = 2$

$\Rightarrow x' = \frac{4}{x}$

أذن لأجل نظير ولكل عنصر $x \in R^*$ يحقق نظيره هو $\frac{4}{x}$

نأخذ $A = R \times R$

$(x_1, y_1) * (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2 , x_1 y_2 - y_1 (x_1$

أثبت أنه هذا القانون تجميعي

Farah Notes

اشهب المطارزة

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner